JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 10, 387–409 (1972)

Espace des parties réelles des éléments d'une algèbre de Banach de fonctions

A. BERNARD

Université de Grenoble, St. Martin D'Hères, France

Communicated by J. Wermer

Received March 1, 1971

In this paper we study the functions which operate on Re A (the space of real parts of elements of a Banach function algebra A). We prove as our main result that if A is uniform or if A is ultraseparating, then only linear functions operate boundedly. We finally obtain a dichotomy for symbolic calculus on $\tilde{C}(K)$, where K is a compact subset of the unit circle T and $\tilde{C}(K)$ denotes the space of those continuous functions f on K which admit a continuous extension to T whose Fourier conjugate is continuous.

INTRODUCTION

Soit A une algèbre de Banach de fonctions complexes sur un compact X. Mon but est d'étudier l'ensemble, noté Re A, des parties réelles des éléments de A.

Le travail est divisé en trois parties. Dans la première partie je regroupe les définitions et notations essentielles, puis j'étudie l'empilement d'espaces de Banach, outil de base pour la suite.

La deuxième partie contient essentiellement une généralisation aux algèbres de Banach d'un théorème de Hoffman et Wermer [1]. Le résultat que j'obtiens est le suivant:

THÉORÈME (Theorem 2, Section 2.2) [2]. *Soit A une algèbre de Banach de fonctions complexes sur un compact X, avec $A \neq C(X)$. Alors* Re A *n'est pas fermé pour la convergence uniforme sur X.*

Toujours dans cette deuxième partie je montre comment ce résultat peut s'utiliser en analyse harmonique.

Dans la troisième partie j'utilise le théorème précédent pour étudier, en utilisant systématiquement une notion d'ultraséparation, le calcul symbolique sur Re A. Dans le cas particulier où A est une algèbre uniforme les résultats obtenus peuvent se résumer ainsi:

580/10/4-2

THÉORÈME (Theorem 6, Section 3.2) [3]. *Soit A une algèbre uniforme sur un compact X. Si $A \neq C(X)$, seules les fonctions affines opèrent de façon bornée sur* Re A.

THÉORÈME (Theorem 10, Section 3.4) [3]. *Soit A une algèbre uniforme sur un compact X. Si $A \neq C(X)$,* Re A *n'est pas réticulé* (*i.e.*, $\varphi(t) = | t |$ *n'opère par sur* Re A).

Remarquons qu'en fait j'obtiens ces deux théorèmes dans un cadre qui contient certaines restrictions d'algèbres uniformes. Remarquons aussi que le second de ces deux théorèmes ne paraît pas être un corollaire formel du premier: en effet je ne sais pas si la fonction $\varphi(t) = | t |$, lorsqu'elle opère, le fait de façon bornée. Il me faut donc mettre au point une technique de localisation, inspirée par celle utilisée en Analyse harmonique pour le calcul symbolique sur les algèbres de groupe.

Dans cette troisième partie j'utilise enfin les résultats précédents pour étudier la conjugaison harmonique classique, ce qui me permet de montrer la dichotomie suivante (Je note $\tilde{C}(\mathbf{T})$ l'espace des fonctions continues sur T dont la conjuguée $\tilde{f}$, $(\sum_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(n) \hat{f}(n)\, e^{in\theta})$, est continue, et, pour tout compact $K \subset \mathbf{T}$, $\tilde{C}(K)$ l'espace des restrictions à K des éléments de $\tilde{C}(\mathbf{T})$):

THÉORÈME (Theorem 12, Section 3.5). *Si $\tilde{C}(K) \neq C(K)$ (c'est-à-dire si K n'est pas de mesure de Lebesgue nulle) alors seules les fonctions affines $(aX + bY + c)$, opèrent sur $\tilde{C}(K)$.*

Un outil important dans cette troisième partie est un théorème de de Leeuw et Katznelson [4] dont je rappelle la démonstration en appendice.

Signalons enfin que dans la troisième partie je n'utilise, de la deuxième partie, que le Théorème 2 (Section 2.2).

1ÈRE PARTIE

1.1. *Notations et Définitions*

Dans tout l'article X désignera un espace topologique compact. Nous noterons $C(X)$ (resp. $C_{\mathbf{R}}(X)$) l'algèbre sur $\mathbf{C}$ (resp. sur $\mathbf{R}$) des applications continues de X dans $\mathbf{C}$ (resp. dans $\mathbf{R}$), muni de la norme de la convergence uniforme sur X. Pour tout $f \in C(X)$, pour tout $K \subset X$, nous noterons:

$$\|f\|_K = \sup\{|f(x)|; x \in K\}.$$

Nous appellerons *espace de Banach de fonctions* réelles (resp. complexes) sur X tout sous-espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de $C_{\mathbf{R}}(X)$ (resp. sur $\mathbf{C}$ de $C(X)$), muni d'une norme qui d'une part le rende complet, d'autre part soit *plus fine* que celle de la convergence uniforme sur X. Nous supposerons de plus que cet espace *contienne les constantes et sépare les points* de X.

Une algèbre de Banach de fonctions complexes (resp. réelles) sur X est un espace de Banach de fonctions complexes (resp. réelles) qui soit clos par produit (Le produit est alors continu, l'application bilinéaire $(f, g) \rightarrow fg$ ayant un graphe fermé).

Une algèbre uniforme sur X est alors une algèbre de Banach de fonctions *complexes* sur X qui soit fermée pour la convergence uniforme sur X.

Etant donné A, espace de Banach de fonctions réelles (ou complexes) sur X, pour tout sous-compact K de X nous noterons A/K l'espace des restrictions à K des éléments de A, muni de la norme N_K définie à partir de la norme N sur A par:

$$N_K(f) = \inf\{N(\tilde{f}); \tilde{f} \in A, \tilde{f}/K = f\}. \tag{1}$$

A/K est alors un espace de Banach de fonctions réelles (resp. complexes) sur K.

Etant donné A, espace de Banach de fonctions complexes sur X, nous noterons $\operatorname{Re} A$ l'espace des parties réelles des éléments de A, muni de la norme N_r définie à partir de la norme N sur A par:

$$N_r(u) = \inf\{N(f); f \in A, \operatorname{Re} f = u\}. \tag{2}$$

$\operatorname{Re} A$ est alors un espace de Banach de fonctions réelles sur X.

Etant donné un espace de Banach A de fonctions réelles (resp. complexes) sur X, nous dirons qu'une fonction φ *opère* sur A si φ est une application *continue* d'un ouvert de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ (resp. de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$) telle que pour tout $f \in A$ à valeurs dans le domaine de φ, $\varphi \circ f \in A$. Nous dirons que φ *opère de façon bornée* sur (une boule de) A si on a, N désignant la norme sur A:

$$\exists \alpha > 0, \quad \exists M \text{ t.q. } f \in A \quad \text{et} \quad N(f) \leqslant \alpha \text{ entraîne } N(\varphi \circ f) \leqslant M.$$

1.2. *Empilement d'espaces de Banach de fonctions*

Soit E un espace de Banach de fonctions réelles sur X. Nous noterons $l^\infty(\mathbf{N}, E)$ l'espace des suites bornées (pour notre norme d'espace de Banach sur E) d'éléments de E. La norme sur E étant *plus fine* que celle de la convergence uniforme sur X, on a:

$$l^\infty(\mathbf{N}, E) \subset l^\infty(\mathbf{N}, C_{\mathbf{R}}(X)). \tag{1}$$

Notons $\beta(\mathbf{N} \times X)$ le compactifié de Stone–Cech de l'espace topologique produit $\mathbf{N} \times X$ ($\mathbf{N}$ étant muni de la topologie discrète et X de sa topologie compacte). Tout élément $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de $l^\infty(\mathbf{N}, C_{\mathbf{R}}(X))$, considéré comme fonction continue bornée sur $\mathbf{N} \times X$, admet une extension continue unique f sur $\beta(\mathbf{N} \times X)$. Dans la suite nous identifierons systématiquement $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ et la fonction f ainsi associée, ce qui nous permet d'écrire:

$$l^\infty(\mathbf{N}, C_{\mathbf{R}}(X)) = C_{\mathbf{R}}(\beta(\mathbf{N} \times X)). \tag{2}$$

Si A est un espace de Banach de fonctions complexes sur X, des identifications analogues nous permettent d'écrire:

$$l^\infty(\mathbf{N}, A) \subset l^\infty(\mathbf{N}, C(X)) = C(\beta(\mathbf{N} \times X)) \tag{3}$$

et la définition de la norme N_r sur $\operatorname{Re} A$ à partir de celle, N, sur A [voir Section 1, formule (2)] nous permet d'écrire:

$$l^\infty(\mathbf{N}, \operatorname{Re} A) = \operatorname{Re} l^\infty(\mathbf{N}, A) \tag{4}$$

la prise de parties réelles dans le deuxième membre de cette égalité pouvant d'ailleurs être faite soit sur $\mathbf{N} \times X$, soit sur $\beta(\mathbf{N} \times X)$.

Remarque. $l^\infty(\mathbf{N}, E)$ (ou $l^\infty(\mathbf{N}, A)$) est un espace de Banach (norme $\tilde{N}$ obtenue à partir de celle, N, sur E, par $\tilde{N}(\{f_n\}_{n\in N}) = \sup\{N(f_n); n \in \mathbf{N}\}$) qui contient les constantes sur $\beta(\mathbf{N} \times X)$, mais ne sépare pas forcément les points de $\beta(\mathbf{N} \times X)$: ce phénomène sera étudié dans la 3ème partie.

Nous utiliserons dans la suite, de façon fondamentale, la proposition suivante:

Proposition 1 [2]. *Soit E un espace de Banach de fonctions réelles (resp. complexes) sur X. Si $l^\infty(\mathbf{N}, E)$ est dense dans $C_{\mathbf{R}}(\beta(\mathbf{N} \times X))$ (resp. dans $C(\beta(\mathbf{N} \times X))$) alors $E = C_{\mathbf{R}}(X)$ (resp. $C(X)$).*

Démontrons cette proposition dans le cas réel (la démonstration est la même dans le cas complexe). Choisissons un nombre $\epsilon \in]0, 1[$. Le fait que $l^\infty(\mathbf{N}, E)$ soit dense dans $C_{\mathbf{R}}(\beta(\mathbf{N} \times X))$ signifie que pour toute suite $\{h_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $C_{\mathbf{R}}(X)$ avec $\| h_n \|_X \leqslant 1$ pour chaque n, il existe $k > 0$ et une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de E telle que, notant N la norme sur E, on ait pour chaque n:

$$N(u_n) \leqslant k \qquad \text{et} \qquad \| h_n - u_n \|_X \leqslant \epsilon.$$

On déduit immédiatement de là qu'il existe $k > 0$ tel que:

$$\forall h \in C_{\mathbf{R}}(X) \quad \text{avec} \quad \| h \|_X \leqslant 1, \quad \exists u \in E \text{ t.q. } N(u) \leqslant k \quad \text{et } \| h - u \|_X \leqslant \epsilon.$$

Soit alors $h \in C_{\mathbf{R}}(X)$: il existe $u_1 \in E$ tel que:

$$N(u_1) \leqslant k \| h \|_X \qquad \text{et} \qquad \| h - u_1 \|_X \leqslant \epsilon \| h \|_X .$$

Approchant maintenant $h - u_1$ on obtient $u_2 \in E$ tel que:

$$N(u_2) \leqslant k\epsilon \| h \|_X \qquad \text{et} \qquad \| h - (u_1 + u_2) \|_X \leqslant \epsilon^2 \| h \|_X .$$

De proche en proche on définit une suite $\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de E telle que:

$$N(u_n) \leqslant k\epsilon^{n-1} \| h \|_X \qquad \text{et} \qquad \| h - \sum_1^n u_p \|_X \leqslant \epsilon^n \| h \|_X .$$

La série $\sum_1^\infty u_p$ définit alors un élément u de E et on a $u = h$.
C.Q.F.D.

2ème Partie

2.1. *Un théorème de Hoffman et Wermer*

Nous allons redémontrer ici (par une méthode élémentaire n'utilisant pas la décomposition antisymétrique) un théorème de Hoffman et Wermer sur les algèbres uniformes [1], théorème que nous étendrons aux algèbres de Banach dans le paragraphe suivant.

Théorème [1]. *Soit A une algèbre uniforme sur un compact X, différente de $C(X)$. Alors* Re A *n'est pas fermé pour la convergence uniforme sur X.*

Démonstration. Puisque $A \neq C(X)$, la sous-algèbre autoadjointe A^* de A, définie par

$$A^* = \{f \in A; \bar{f} \in A\},$$

ne sépare pas les points de X (Stone–Weierstrass). Donc il existe une classe K de X, pour la relation d'équivalence sur X définie par A^* ($x \sim y$ si $f(x) = f(y)$ pour tout $f \in A^*$), telle que K ne soit pas réduit à un point.

A^* étant autoadjointe, K est intersection d'ensembles pics pour A^*, donc pour A (Pour chaque $x \notin K$, prendre $f_x \in A^*$ nulle sur K, non nulle en x, puis considérer $h_x = 1 - f_x^2 \times \|f_x^2\|_X^{-1}$, h_x "pique" sur K). A séparant les points de K (non réduit à un point), on peut choisir x_0 et $x_1 \in K$ tels que:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists f_\epsilon \in A, \quad \|f_\epsilon\|_X \leqslant 1 + \epsilon, \quad f_\epsilon(x_0) = 0, \quad f_\epsilon(x_1) = 1. \tag{1}$$

(On prend $g \in A$, non constante sur K, s'annulant en au moins un point de K. On chosit x_0 tel que $g(x_0) = 0$ puis x_1 tel que $|g(x_1)| = \|g\|_K$. Considérer ensuite g_1 définie par $g_1(x) = g(x) \times (g(x_1))^{-1}$. Pour chaque $\epsilon > 0$, on obtient $f_\epsilon \in A$ satisfaisant à (1) en multipliant g_1 par une nombre fini de fonctions "piquant" sur K, bien choisies. Remarquons d'ailleurs que des arguments classiques d'algèbre de fonctions permettent d'obtenir (1) pour $\epsilon = 0$).

De (1) on déduit:

$$\forall M > 0, \quad \exists h \in A \text{ t.q. } \|\operatorname{Re} h\|_X \leqslant 1, \quad h(x_0) = 0, \quad |h(x_1)| \geqslant M. \tag{2}$$

(Il suffit de choisir un polynome P envoyant le disque unité fermé de C dans la bande $-1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant +1$, et tel que $|P(1)| > M$. Pour ϵ assez petit, $h = P \circ (f_\epsilon/1 + \epsilon)$ satisfait à (2)).

Utilisons maintenant le fait que, Re A étant fermé pour la norme uniforme sur X, l'application $\mathbf{R}$-linéaire $f \to \operatorname{Re} f$ de A sur Re A est ouverte (pour les normes uniformes). Donc il existe une constante k telle que:

$$\forall u \in \operatorname{Re} A, \qquad \exists h' \in A \text{ t.q. } \operatorname{Re} h' = u \qquad \text{et} \qquad \|h'\|_X \leqslant k \|u\|_X. \tag{3}$$

Choisissons alors $h \in A$ satisfaisant à (2) avec $M = 2k + 1$, puis h' satisfaisant à (3) pour $u = \operatorname{Re} h$, on obtient alors un élément de A^*, précisément $h - h'$, qui sépare x_0 et x_1. Ceci contredit la définition de K. C.Q.F.D.

Du théorème précédent on déduit immédiatement le corollaire suivant:

COROLLAIRE 1. *Soit A une sous-algèbre de $C(X)$, séparant les points et contenant les constantes. Si* Re *A est fermé pour la convergence uniforme sur X, alors A est dense dans $C(X)$ et* Re $A = C_{\mathbf{R}}(X)$.

Remarques. Browder [5] a donné de ce théorème 1 une démonstration d'un autre type (analyse fonctionnelle). Sidney et Stout [6] ont étendu ce théorème 1 aux algèbres restrictions d'algèbres uniformes (voir aussi Glicksberg [7] pour une extension à des idéaux). On peut aussi lire d'autres démonstrations dans [8] et dans [9].

2.2. $\operatorname{Re} A = C_{\mathbf{R}}(X) \Rightarrow A = C(X)$

Nous allons déduire du théorème de Hoffman et Wermer le résultat suivant (dont nous donnerons une extension aux espaces de Banach dans la 3ème partie (Proposition 8, Section 3.2).

THÉORÈME 2 [2]. *Soit A une algèbre de Banach de fonctions complexes sur X. Si* Re *A est fermé pour la convergence uniforme sur X, alors $A = C(X)$.*

Démonstration. D'après le théorème de Hoffman et Wermer (Corollaire 1, Section 2.1) on a forcément:

$$\operatorname{Re} A = C_{\mathbf{R}}(X). \tag{1}$$

D'après le théorème du graphe fermé la norme uniforme sur X est équivalente à la norme obtenue sur Re A à partir de celle donnée sur A (formule (2), Section 1.1), donc d'après la formule (2) du Section 1.2, on a:

$$l^\infty(\mathbf{N}, \operatorname{Re} A) = C_{\mathbf{R}}(\beta(\mathbf{N} \times X)). \tag{2}$$

D'après la formule (4) du Section 1.2, on a donc:

$$\operatorname{Re} l^\infty(\mathbf{N}, A) = C_{\mathbf{R}}(\beta(\mathbf{N} \times X)). \tag{3}$$

On en déduit tout d'abord que $l^\infty(\mathbf{N}, A)$ sépare les points de $\beta(\mathbf{N} \times X)$, puis, appliquant le théorème de Hoffman et Wermer (Corollaire 1, Section 2.1) à $l^\infty(\mathbf{N}, A)$, que:

$$l^\infty(\mathbf{N}, A) \text{ est dense dans } C(\beta(\mathbf{N} \times X)). \tag{4}$$

La Proposition 1 (Section 1.2) nous permet de conclure que $A = C(X)$.
C.Q.F.D.

Ce théorème admet comme corollaire immédiat le résultat suivant de Wik [10], que nous étendrons aux groupes localement compacts abéliens dans le Section 2.4:

COROLLAIRE 2. *Soit K un sous-compact du tore $\mathbf{T}$. Supposons que K soit un ensemble de Helson (i.e., que toute fonction continue sur K puisse s'écrire $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\theta}$ avec $\sum |a_n| < +\infty$) alors toute fonction continue sur K peut s'écrire $\sum_0^{+\infty} b_n e^{in\theta}$ avec $\sum |b_n| < +\infty$.*

Démonstration. Notons $A = A(\mathbf{T}) = \{f \in C(\mathbf{T}); \sum |\hat{f}(n)| < +\infty\}$ et $A^+ = A^+(\mathbf{T}) = \{f \in A(\mathbf{T});\ \forall n < 0,\ \hat{f}(n) = 0\}$. Ce sont là deux algèbres de Banach de fonctions complexes sur $\mathbf{T}$. On vérifie aisément que $\operatorname{Re} A = \operatorname{Re} A^+$. Si K est un ensemble de Helson, $A/K = C(K)$, donc $\operatorname{Re} A/K = C_{\mathbf{R}}(K)$, donc $\operatorname{Re} A^+/K = C_{\mathbf{R}}(K)$ et, d'après le Théorème 2, on a $A^+/K = C(K)$. C.Q.F.D.

Indiquons comment la technique utilisée pour déduire le Théorème 2 du théorème de Hoffman et Wermer permet aussi de déduire de ce dernier le théorème suivant de Wermer [11]:

THÉORÈME 3. *Soit A une algèbre uniforme sur X. Si $A \neq C(X)$,* Re *A n'est pas clos par produit.*

Démonstration. Supposons $\operatorname{Re} A$ clos par produit. D'après le théorème du graphe fermé, le produit est continu sur $\operatorname{Re} A$ (muni de la norme définie par la formule (2) du Section 1.1). On a donc:

$$l^\infty(\mathbf{N}, \operatorname{Re} A) \text{ est une sous-algèbre de } C_{\mathbf{R}}(\beta(\mathbf{N} \times X)). \tag{5}$$

Il nous suffit maintenant de montrer que $l^\infty(\mathbf{N}, \operatorname{Re} A)$, qui contient bien sûr les constantes, sépare les points de $\beta(\mathbf{N} \times X)$ (en effet, d'après le théorème de Weierstrass–Stone, $l^\infty(\mathbf{N}, \operatorname{Re} A)$ est alors dense dans $C_{\mathbf{R}}(\beta(\mathbf{N} \times R))$, donc $\operatorname{Re} A = C_{\mathbf{R}}(X)$ d'après la Proposition 1 du Section 1.2, donc finalement $A = C(X)$ d'après le théorème de Hoffman et Wermer).

Et le fait que $l^\infty(\mathbf{N}, \operatorname{Re} A)$ sépare les points sur $\beta(\mathbf{N} \times X)$ peut s'obtenir de la façon suivante (voir aussi le Corollaire 3 et la Proposition 6 du Section 3.1).

Soient Φ et Φ' deux points distincts de $\beta(\mathbf{N} \times X)$. Ils admettent des voisinages compacts disjoints K et K'. Notons pour chaque n $K_n = K \cap \{\{n\} \times X\}$ et $K_n' = K' \cap \{\{n\} \times X\}$. Puisque $\operatorname{Re} A$ est dense dans $C_{\mathbf{R}}(X)$ (par Weierstrass–Stone) il existe, pour chaque n, $f_n \in A$ telle que:

$$\operatorname{Re} f_n \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad K, \qquad \operatorname{Re} f_n \leqslant 1 \quad \text{sur} \quad K_n, \qquad \operatorname{Re} f_n \geqslant 2 \quad \text{sur} \quad K_n'.$$

La suite $g_n = \exp(-f_n)$ définit un élément F de $l^\infty(\mathbf{N}, A)$ tel que:

$$|F(\Phi)| \geqslant e^{-1} \qquad \text{et} \qquad |F(\Phi')| \leqslant e^{-2}.$$

Enfin $\operatorname{Re}(F/F(\Phi))$ est un élément de $l^\infty(\mathbf{N}, \operatorname{Re} A)$ qui sépare Φ et Φ'. C.Q.F.D.

Nous développerons dans la 3ème partie d'autres applications de cette idée de démonstration, dans le but d'une part d'étendre ce théorème de Wermer à certaines algèbres restrictions d'algèbres uniformes, d'autre part de le considérer comme cas particulier de l'étude du calcul symbolique sur Re A.

2.3. Re A = Re $B \Rightarrow A = B$?

On peut donner des exemples de la situation suivante: A et B sont deux algèbres de Banach de fonctions complexes sur X telles que $A \subset B$ et $\operatorname{Re} A = \operatorname{Re} B$ et pourtant $A \neq B$. Il suffit de prendre $X = \mathbf{T}$, pour A les séries de Taylor absolument convergentes (restreintes au cercle $\mathbf{T}$) et pour B les séries de Fourier absolument convergentes. Cette situation peut aussi se produire lorsque A est uniforme et B une algèbre restriction d'algèbre uniforme (prendre pour A l'algèbre du disque et pour B l'algèbre de l'anneau $\frac{1}{2} \leqslant z \leqslant 1$, toutes deux restreintes au cercle $\mathbf{T}$).

Nous allons néanmoins déduire des théorèmes précédents que la réponse à la question posée en titre est oui si A et B sont uniformes. Plus généralement on a:

THÉORÈME 4 [12]. *Soient A et B deux algèbres de Banach de fonctions complexes sur X, telles que $A \subset B$ et* $\operatorname{Re} A = \operatorname{Re} B$. *Si l'une ou l'autre des hypothèses* H_1 *ou* H_2 *ci-dessous est satisfaite, alors* $A = B$:

H_1: *B est uniforme sur X,*

H_2: *A est uniforme sur X et $B^* = \{f \in B; \bar{f} \in B\}$ est fermée dans B (pour la norme de Banach de B)*

Remarque. On peut facilement montrer que ce Théorème 4 reste vrai si on ne suppose plus que A et B contiennent les constantes et séparent les points de X. On peut aussi l'utiliser si X n'est pas compact (quitte à le compactifier) (pour plus de précisions voir [12]).

Démonstration. Notons $B^* = \{f \in B; \bar{f} \in B\}$ ($\bar{f}$ désignant la fonction conjuguée de f sur X) et $A' = A \cap B^*$.

On vérifie facilement que le fait que $A \subset B$ et $\operatorname{Re} A = \operatorname{Re} B$ entraîne $\operatorname{Re} A' = \operatorname{Re} B^*$. Nous allons en déduire que, moyennant l'une ou l'autre des hypothèses H_1 ou H_2, on a alors $A' = B^*$:

Notons $\tilde{X}$ le compact quotient de X par la relation d'équivalence définie par B^* ($x \sim y$ si $f(x) = f(y)$ pour tout $f \in B^*$). Via une identification naturelle on a:

$$A' \subset B^* \subset C(\tilde{X}).$$

A' et B^* sont alors deux algèbres de Banach de fonctions complexes sur $\tilde{X}$, telles que $A' \subset B^*$ et $\operatorname{Re} A' = \operatorname{Re} B^*$.

Si l'hypothèse H_1 est satisfaite, B^* est uniforme sur $\tilde{X}$, mais elle est de plus autoadjointe, donc $B^* = C(\tilde{X})$, donc $A' = C(\tilde{X})$ d'après le Théorème 2.

Si l'hypothèse H_2 est satisfaite, le théorème du graphe fermé montre que A' est uniforme sur X. Mais Re A' est une algèbre, (comme Re B^*), donc d'après le Théorème 3, $A' = B^*$.

Pour conclure la démonstration, il suffit d'observer que $A' = B^*$ et Re A = Re B entraîne $A = B$ (vérification facile).

2.4. *Applications à l'analyse harmonique*

Nous nous proposons de montrer tout d'abord un théorème qui étend aux groupes localement compacts abéliens le théorème de Wik rappelé dans le paragraphe 2.2.

Soit Γ un groupe localement compact abélien. Notons G son dual. Supposons donnée une partie borélienne G^+ de G, satisfaisant à:

$$G^+ + G^+ \subset G^+ \qquad \text{et} \qquad G^+ U(-G^+) = G.$$

Notons $B(\Gamma)$ (resp. $B^+(\Gamma)$) l'ensemble des transformées de Fourier $\hat{\mu}$ des mesures bornées μ sur G (resp. de mesures bornées concentrées sur G^+). $B(\Gamma)$ est une algèbre (Banachisable) de fonctions continues bornées sur Γ. $B^+(\Gamma)$ en est une sous-algèbre (fermée).

Soit F une partie de Γ. Notons $C_u(F)$ l'algèbre des fonctions uniformément continues sur F pour la structure uniforme définie sur F par $B(\Gamma)$. Nous dirons que F est d'interpolation pour $B(\Gamma)$ (resp. pour $B^+(\Gamma)$) si $B(\Gamma)/F = C_u(F)$ (resp. $B^+(\Gamma)/F = C_u(F)$. Nous pouvons énoncer le théorème:

THÉORÈME 5. *Soit F une partie de Γ. Les trois assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) *F est d'interpolation pour $B(\Gamma)$*,
(ii) *F est d'interpolation pour $B^+(\Gamma)$*,
(iii) *$B^+(\Gamma)/F$ est fermée pour la convergence uniforme sur F*.

Démonstration. Montrons tout d'abord que Re $B(\Gamma)$ = Re $B^+(\Gamma)$: soit $u \in$ Re $B(\Gamma)$. Il existe une mesure μ sur G telle que $u = (\hat{\mu} + \bar{\hat{\mu}})/2$. Soit, en posant $\mu' = (\mu + \tilde{\mu})/2$, $u = \hat{\mu}'$. ($\tilde{\mu}$ désigne la mesure définie par $\tilde{\mu}(E) = \mu(-E)$). Notons alors μ_1 et μ_2 les restrictions de μ' à G^+ et au complémentaire de G^+ et posons:

$$\nu = \mu_1 + \tilde{\mu}_2 .$$

On vérifie aisément que $\hat{\nu} \in B^+(\Gamma)$ et u = Re $\hat{\nu}$, donc que

$u \in \operatorname{Re} B^+(\Gamma)$. On a donc $\operatorname{Re} B(\Gamma) \subset \operatorname{Re} B^+(\Gamma)$ et l'inclusion inverse est triviale.

Notant $B(F)$ et $B^+(F)$ les algèbres restrictions de $B(\Gamma)$ et $B^+(\Gamma)$ à F, on a alors sur F:

$$\operatorname{Re} B(F) = \operatorname{Re} B^+(F).$$

Le fait que (i) $\Rightarrow$ (ii) provient alors du Théorème 4 (Section 2.3) appliqué avec son hypothèse H_1. Le fait que (iii) $\Rightarrow$ (i) provient du Théorème 4 (Section 2.3) appliqué avec son hypothèse H_2 et du théorème de Stone–Weierstrass. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est triviale.

C.Q.F.D.

Remarque. On peut énoncer un théorème analogue lorsqu'on remplace $B(\Gamma)$ (et $B^+(\Gamma)$) par certaines sous-algèbres, par exemple, $A_\omega(\Gamma)$ et $A_\omega{}^+(\Gamma)$ (ω désigne une mesure positive (bornée ou non) sur G telle que $L^1(\omega)$ soit une algèbre symétrique). Le fait que les algèbres en question ne soient éventuellement pas unitaires n'empêche pas d'appliquer le théorème 4 (cf. remarque suivant le Théorème 4).

On peut se demander ce qu'il peut rester du théorème précédent si on n'astreint plus G à la condition $G^+ U(-G^+) = G$. Un modèle de cette situation est fourni par $\Gamma = \mathbf{T}^2$, $G = Z^2$ et $G^+ = Z^+ \times Z^+$ (premier quadrant). Dans ce cas là $B^+(\mathbf{T}^2)$, que nous noterons $A^{++}(\mathbf{T}^2)$, peut être identifié à l'algèbre des séries de Taylor absolument convergentes sur le polydisque $\bar{D}^2$. Hedberg [13, 14] a montré, en déplaçant des "courbes de Kahane", qu'il existe un compact K de $\mathbf{T}^2$ qui soit de Helson, mais non d'interpolation pour $A^{++}(\mathbf{T}^2)$. Nous nous proposons ici de montrer, grâce au Théorème 2 (Section 2.2) qu'une "courbe de Kahane" est toujours d'interpolation pour $A^{++}(\mathbf{T}^2)$. Précisons:

DÉFINITION. Appelons "courbe de Kahane" toute courbe de $\mathbf{T}^2$ définie par $\{\theta_1 = \varphi_1(t),\ \theta_2 = \varphi_2(t)\}$ où φ_1 et φ_2 sont deux applications continues de $I = [0, 1]$ dans $\mathbf{T}$ telles que, pour tout $f \in C(I)$, il existe $g_1 \in A(\mathbf{T})$ et $g_2 \in A(\mathbf{T})$ avec:

$$f = g_1 \circ \varphi_1 + g_2 \circ \varphi_2$$

(J. P. Kahane a montré [15] l'existence de telles courbes—avec en plus φ_1 et φ dans $\operatorname{lip}_\alpha(\alpha < \frac{1}{2})$). Une telle courbe est trivialement un Helson. Montrons que, en plus:

PROPOSITION 2. *Toute "courbe de Kahane" est d'interpolation pour* $A^{++}(\mathbf{T}^2)$.

Démonstration. Notons A_1 (resp. A_2) la sous-algèbre de $C(I)$ formée des $g \circ \varphi_1$ (resp. $g \circ \varphi_2$) lorsque g parcourt $A(\mathbf{T})$. On a alors par hypothèse:

$$A_1 + A_2 = C(I). \tag{1}$$

Notons $A_1{}^+$ (resp. $A_2{}^+$) la sous-algèbre de $C(I)$ formée des $g \circ \varphi_1$ (resp. $g \circ \varphi_2$) lorsque g parcourt $A^+(\mathbf{T})$ (éléments de $A(\mathbf{T})$ à coefficients de Fourier nuls hors de Z^+). On a bien sûr $\operatorname{Re} A_1 = \operatorname{Re} A_1{}^+$ et $\operatorname{Re} A_2 = \operatorname{Re} A_2{}^+$. On déduit donc de (1) que:

$$\operatorname{Re}(A_1{}^+ + A_2{}^+) = C_{\mathbf{R}}(I). \tag{2}$$

Notons alors $B = \{g \circ (\varphi_1, \varphi_2); g \in A^{++}(T^2)\}$. On a bien sûr $B \supset A_1{}^+ + A_2{}^+$, donc d'après (2) on a:

$$\operatorname{Re} B = C_{\mathbf{R}}(I). \tag{3}$$

Mais B est une algèbre de Banach de fonctions complexes sur I, donc d'après le Théorème 2 (Section 2.2), on a:

$$B = C(I). \tag{4}$$

Mais (4) signifie que la courbe de $\mathbf{T}^2$ définie par (φ_1, φ_2) est d'interpolation pour $A^{++}(\mathbf{T}^2)$. C.Q.F.D.

On déduit de là *qu'il existe deux fonctions continues* φ_1 *et* φ_2 *sur l'intervalle* $I = [0, 1]$, *telles que toute fonction continue* f *sur* I *s'écrive*:

$$f = \sum_{\substack{n_1 \geq 0 \\ n_2 \geq 0}} a_{n_1,n_2} \varphi_1^{n_1} \varphi_2^{n_2}, \qquad \text{avec} \quad \sum |a_{n_1,n_2}| < +\infty.$$

3ème Partie

3.1. *Espaces ultraseparants de fonctions continues*

Définition. Soit E un espace de Banach de fonctions réelles (resp. complexes) sur X. Nous dirons que E est *ultraséparant* sur X si $l^\infty(\mathbf{N}, E)$ (cf. Section 1.2) sépare les points de $\beta(\mathbf{N} \times X)$ [16]. Avec notre terminologie, $l^\infty(\mathbf{N}, E)$ est alors un espace de Banach de fonctions réelles (resp. complexes) sur $\beta(\mathbf{N} \times X)$.

Les propositions ci-dessous fournissent des exemples d'algèbres ultraséparantes: en particulier l'algèbre du polydisque restreinte à tout sous-compact K du tore $\mathbf{T}^n$:

PROPOSITION 3. *Soit A une algèbre uniforme sur X. Si A est modulaire sur X* (i.e., *si* $|A|$, *ensemble des modules d'éléments de A, est uniformément dense dans $C_{\mathbf{R}^+}(X)$) alors A est ultraséparante sur X.*

Démonstration. Du fait que $|A|$ est dense dans $C_{\mathbf{R}^+}(X)$, l'ensemble $l^\infty(\mathbf{N}, |A|)$ des suites bornées—en norme uniforme sur X—d'éléments de $|A|$ est dense dans $C_{\mathbf{R}^+}(\beta(\mathbf{N} \times X))$. Mais, puisque A est uniforme:

$$l^\infty(\mathbf{N}, |A|) = |l^\infty(\mathbf{N}, A)|.$$

Donc $|l^\infty(\mathbf{N}, A)|$, et à fortiori $l^\infty(\mathbf{N}, A)$, sépare les points de $\beta(\mathbf{N} \times X)$.

Nous aurons surtout à utiliser la conséquence suivante de cette proposition:

COROLLAIRE 3. *Soit A une algèbre uniforme sur X. Si A est de Dirichlet sur X (i.e.,* Re *A dense dans $C_{\mathbf{R}}(X)$) alors A est ultraséparante sur X.*

Démonstration. En effet, toute algèbre uniforme de Dirichlet est modulaire puisque, avec des notations évidentes, exp Re $A \subset |A|$.

La proposition suivante fournit alors des exemples d'algèbres non uniformes, mais ultraséparantes.

PROPOSITION 4. *Soit A un espace de Banach de fonctions réelles (ou complexes) sur X, ultraséparant sur X. Si K est un sous-compact de X, A/K est ultraséparant sur K.*

Démonstration. Par définition de la norme sur A/K (formule (1) du Section 1.2), $l^\infty(\mathbf{N}, A/K)$ est en effet la restriction de $l^\infty(\mathbf{N}, A)$ à $\beta(\mathbf{N} \times K)$-plongé canoniquement dans $\beta(\mathbf{N} \times X)$. On en déduit le résultat.

Signalons maintenant qu'une algèbre de Banach de fonctions réelles (resp. complexes et autoadjointe) sur X, différente de $C_{\mathbf{R}}(X)$ (resp. de $C(X)$) n'est jamais ultraséparante: en effet l'ultraséparation permettrait d'appliquer le théorème de Weierstrass–Stone sur $\beta(\mathbf{N} \times X)$, d'où une contradiction avec la Proposition 1 (Section 1.2).

Signalons encore la proposition suivante:

PROPOSITION 5. *Soit A une algèbre de Banach de fonctions complexes sur X, ultraséparante sur X. Si K_1 et K_2 sont deux sous-compacts de X qui soient d'interpolation pour A (i.e., $A/K_i = C(K_i)$) alors $K = K_1 \cup K_2$ est d'interpolation pour A.*

Démonstration. Notons $\tilde{A} = l^\infty(\mathbf{N}, A)$ et $\tilde{K}_i = \beta(\mathbf{N} \times K_i)$ pour

$i = 1, 2$. On a de façon canonique $\tilde{K}_i \subset \beta(\mathbf{N} \times X)$ et $\tilde{A}/\tilde{K}_i = l^\infty(\mathbf{N}, A/K_i)$ par définition de la norme sur A/K_i. Donc

$$\tilde{A}/\tilde{K}_i = C(\tilde{K}_i) \qquad \text{pour} \quad i = 1 \text{ ou } 2. \tag{1}$$

Mais A étant ultraséparante, l'algèbre $\tilde{A}$ sépare les points sur $\beta(\mathbf{N} \times X)$, donc on déduit de (1) que:

$$\tilde{A}/\tilde{K}_1 \cup \tilde{K}_2 \text{ est dense dans } C(\tilde{K}_1 \cup \tilde{K}_2). \tag{2}$$

Mais

$$\tilde{K}_1 \cup \tilde{K}_2 = \beta(\mathbf{N} \times (K_1 \cup K_2)) \quad \text{et} \quad \tilde{A}/\tilde{K}_1 \cup \tilde{K}_2 = l^\infty(\mathbf{N}, A/K_1 \cup K_2)$$

donc $A/K_1 \cup K_2 = C(K_1 \cup K_2)$ d'après la Proposition 1. C.Q.F.D.

De la formule (2) du Section 1.2, on déduit immédiatement que:

PROPOSITION 6. *Soit A un espace de Banach de fonctions complexes sur X. Si A est ultraséparant sur X,* Re *A est ultraséparant sur X (et réciproquement).*

Remarquons enfin que si A est un espace de Banach de fonctions sur X une condition nécessaire pour que A soit ultraséparant sur X est que la métrique de Gleason d_A sur X associée à A soit uniformément discrète (d_A est définie par $d_A(x, y) = \sup\{|f(x) - f(y)|;\ f \in A, N(f) \leqslant 1\}$). En effet supposons qu'il existe pour chaque n, x_n et $y_n \in X$, distincts tels que $d_A(x_n, y_n) \to 0$. Soit U un ultrafiltre non trivial sur $\mathbf{N}$. U définit deux points x et y de $\beta(N \times X)$ de la façon suivante: si h est une fonction continue sur $\beta(N \times X)$ on pose:

$$h(x) = \lim_U h(n, x_n)$$
$$h(y) = \lim_U h(n, y_n)$$

x et y sont différents (prendre h définie par une suite bornée de fonctions continues h_n telles que $h_n(x_n) = 0$ et $h_n(y_n) = 1$) et pourtant si $f \in l^\infty(\mathbf{N}, A)$ on a $f(x) = f(y)$ (en effet

$$|f(x) - f(y)| = \lim_U |f(n, x_n) - f(n, y_n)|$$

et on a: $|f(n, x_n) - f(n, y_n)| \leqslant N(f_n) \times d_A(x_n, y_n)$ d'où le résultat).

3.2. *Fonctions qui opèrent de façon bornée sur* Re A

Nous nous proposons de montrer un théorème (Théorème 7) qui nous donnera en particulier le résultat suivant (que l'on peut considérer comme une généralisation du Théorème 3 (Section 2.2).

THÉORÈME 6 [3]. *Soit A une algèbre uniforme sur X, différente de $C(X)$. Seules les fonctions affines ($at + b$; $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$) opèrent de façon bornée sur* Re A *(Définition, Section* 1.1).

Montrons tout d'abord la proposition suivante:

PROPOSITION 7. *Soit E un espace de Banach de fonctions réelles sur X, ultraséparant sur X. Si une fonction non affine opère de façon bornée sur E, $E = C_{\mathbf{R}}(X)$.*

Démonstration. Soit φ une fonction non affine opérant de façon bornée sur E. φ opère alors sur (une boule de) $l^{\infty}(\mathbf{N}, E)$. D'après une extension du théorème de Weierstrass–Stone due à de Leeuw et Katznelson [4], (voir ici l'appendice Section 3.6), $l^{\infty}(\mathbf{N}, E)$, puisqu'il sépare les points de $\beta(\mathbf{N} \times X)$, est alors forcément dense dans $C_{\mathbf{R}}(\beta(\mathbf{N} \times X))$. Donc $E = C_{\mathbf{R}}(X)$ d'après la Proposition 1 (Section 1.2).
Montrons maintenant le théorème suivant, d'où nous pourrons déduire le Théorème 6 annoncé, mais qui s'applique aussi aux algèbres qu'on peut obtenir par les Propositions 3 et 4 (Section 3.1).

THÉORÈME 7 [3]. *Soit A une algèbre de Banach de fonctions sur X, ultraséparante sur X. Si $A \neq C(X)$, seules les fonctions affines ($at + b$; $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$) opèrent de façon bornée sur* Re A.

Démonstration. D'après la Proposition 6 (Section 3.1) Re A est ultraséparant sur X. Donc, si une fonction non affine opérait de façon bornée sur Re A, on aurait, d'après la proposition précédente, Re $A = C_{\mathbf{R}}(X)$, d'où enfin $A = C(X)$ d'après le Théorème 2 (Section 2.2).

Démonstration du Théorème 6. Si une fonction non affine opérait sur Re A, Re A serait dense dans $C_{\mathbf{R}}(X)$ (appendice, Section 3.6). Donc A, qui est uniforme sur X, serait de Dirichlet, donc ultraséparante sur X d'après le Corollaire 3 (Section 3.1). On conclut par le Théorème 7.

Remarque. Ces méthodes nous permettent aussi d'améliorer le Théorème 2 de la façon suivante:

PROPOSITION 8. *Soit A un espace de Banach de fonctions complexes sur X. Si* Re $A = C_{\mathbf{R}}(X)$ *et $A \neq C(X)$, seules les fonctions affines $aZ + b$ ($a \in \mathbf{C}$, $b \in \mathbf{C}$) opèrent de façon bornée sur A (Nous savions déjà—Théorème* 2 *(Section* 2.2)*—que A ne peut être une algèbre).*

Démonstration. Du fait que $\operatorname{Re} A = C_{\mathbf{R}}(X)$, $\operatorname{Re} A$ est ultraséparant sur X, donc A est ultraséparente sur X (Proposition 4 (Section 3.1)). Mais A n'est pas une algèbre d'après le Théorème 2 (Section 2.2) et enfin A n'est, évidemment, pas autoadjointe. La proposition est donc une conséquence immédiate du théorème suivant:

PROPOSITION 9. *Soit A un espace de Banach de fonctions fomplexes sur X, ultraséparant sur X. Si A n'est pas une algèbre seules les fonctions affines $aZ + b\bar{Z} + c$ $(a, b, c \in \mathbf{C})$ peuvent opérer de façon bornée sur A.*

Démonstration. Si φ opère de façon bornée sur A, φ opère sur $l^{\infty}(\mathbf{N}, A)$. Mais $l^{\infty}(\mathbf{N}, A)$, qui contient les constantes et sépare les points sur $\beta(\mathbf{N} \times X)$, n'est pas une algèbre, donc φ est de la forme voulue d'après l'appendice (Section 3.6).

3.3. *Fonctions qui opèrent sur* Re A

Les résultats du paragraphe précédent ne sont satisfaisants que dans la mesure où on peut décider si une fonction φ qui opère le fait, ou non, de façon bornée (sur une boule). Pour $\varphi(t) = t^2$ on le voit par le théorème du graphe fermé (voir Theorem 3). Pour $\varphi(t) = |t|$, on ne voit pas comment conclure directement. Nous allons utiliser la notion d'espace de fonctions "normal", et une méthode inspirée de celles utilisées en analyse harmonique pour le calcul symbolique sur les algèbres de Banach régulières.

DÉFINITION. Soit E un espace de Banach de fonctions réelles (ou complexes) sur X. E est dit *normal* si pour tout couple de sous-compacts disjoints K et K' de X on a la propriété suivante:

$$\forall u \in E/K, \qquad \exists \tilde{u} \in E \qquad \text{tel que} \quad \tilde{u}/K = u \quad \text{et} \quad \tilde{u}/K' = 0.$$

Remarque. Si E n'est pas clos par produit, il ne suffit pas de supposer l'existence d'un élément de E égal à 1 sur K et 0 sur K'.

DÉFINITION. Soit E un espace de Banach de fonctions réelles (ou complexes) sur X. Soit φ une fonction opérant sur E. On dira que *φ opère de façon bornée au point $x_0 \in X$* s'il existe un voisinage compact K de x_0 tel que φ opère de façon bornée sur (une boule de) E/K.

On a alors la proposition suivante:

PROPOSITION 10. *Soit E un espace de Banach de fonctions réelles (ou complexes) sur X. Supposons E normal. Soit φ une fonction opérant sur E. Il existe alors une partie finie Φ de X telle que φ opère de façon bornée en tout point $x_0 \notin \Phi$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un ensemble infini en tout point duquel φ n'opère pas de façon bornée. Il existe alors une suite infinie de compacts K_n tels que, pour chaque n, $K_n \cap (\overline{\bigcup_{p\neq n} K_p})$ soit vide et φ n'opère pas de façon bornée sur E/K_n. Notons pour chaque n:

$$E_n = \{u \in E;\ u/K_p = 0 \quad \forall p \neq n\}.$$

E étant normal on a:

$$E_n/K_n = E/K_n.$$

Mais E_n est une sous-espace fermé de E (car la norme N sur E est plus fine que celle de la convergence uniforme sur X) donc E_n/K_n est un espace de Banach pour la norme M_n définie par:

$$M_n(u) = \inf\{N(\tilde{u});\ \tilde{u}/K_n = u,\ \tilde{u} \in E_n\}.$$

Cette norme étant plus fine que la norme de Banach N_{K_n} sur E/K_n lui est alors équivalente par le théorème du graphe fermé. Il existe donc $k_n > 0$ tel que pour tout $u \in E/K_n$

$$k_n M_n(u) \leqslant N_{K_n}(u).$$

φ opérant de façon non bornée sur E/K_n il existe, pour chaque n, $u_n \in E/K_n$ telle que:

$$N_{K_n}(u_n) < \frac{k_n}{2^n} \qquad \text{et} \qquad N_{K_n}(\varphi(u_n)) > n.$$

Soit d'après l'inégalité précédente:

$$M_n(u_n) < \frac{1}{2^n} \qquad \text{et} \qquad N_{K_n}(\varphi(u_n)) > n.$$

On peut donc, pour chaque n, choisir $\tilde{u}_n \in E$ tel que:

(i) $\tilde{u}_n = 0$ sur K_p, $\forall p \neq n$,
(ii) $N(u_n) \leqslant 1/2^n$,
(iii) tout prolongement de $\varphi(\tilde{u}_n)/K_n$ en élément de E soit de norme $\geqslant n$.

Considérons alors $\tilde{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n$: d'après (ii) $\tilde{u} \in E$. D'après (i) on a $\varphi(\tilde{u})/K_n = \varphi(\tilde{u}_n)/K_n$ pour chaque n. D'après (iii) on a donc $N(\varphi(\tilde{u})) \geqslant n$ pour tout n, ce qui est absurde. C.Q.F.D.

Ceci nous permet d'énoncer la proposition suivante:

PROPOSITION 11. *Soit E un espace de Banach de fonctions réelles sur X. Supposons E normal et ultraséparant sur X. Si une fonction non affine opère sur E, alors il existe une partie finie $\varnothing$ de X telle que, pour tout $x_0 \notin \varnothing$, il existe un voisinage compact K_{x_0} de x_0 tel que $E/K_{x_0} = C_{\mathbf{R}}(K_{x_0})$.*

Démonstration. C'est là un simple corollaire des Propositions 4 (Section 3.1), 7 et 10 (Section 3.3).

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat suivant (qui complète le Théorème 6).

THÉORÈME 8. *Soit A une algèbre uniforme sur X, différente de $C(X)$, telle que* Re A *soit normal sur X. Seules les fonctions affines $(at + b$; $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R})$ opèrent sur* Re A.

Démonstration. En effet si une fonction non affine opère sur Re A, Re A est dense dans $C_{\mathbf{R}}(X)$, donc ultraséparant sur X d'après le Corollaire 3 (Section 3.1). D'après la Proposition 11 et le Théorème 2 (Section 2.2) il existe donc une partie finie Φ de X telle que tout $x_0 \notin \varnothing$ admette un voisinage K_{x_0} avec $A/K_{x_0} = C(K_{x_0})$. A étant uniforme on en déduit facilement que $A = C(X)$.

De façon plus générale nous allons montrer le fait suivant qui, comme nous le verrons, s'applique en particulier à l'algèbre du disque:

THÉORÈME 9. *Soit A une algèbre uniforme modulaire sur X, telle que* Re A *soit normal sur X. Soit K un sous-compact de X. On a alors la dichotomie*:

(i) *Soit $A/K = C(K)$;*

(ii) *Soit seules les fonctions affines $(at + b$; $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R})$ opèrent sur* Re A/K.

Démonstration. Tout d'abord, A étant uniforme modulaire sur X, Re A/K est ultraséparante sur K d'après les Propositions 3, 4 et 6 du Section 3.1. Supposons maintenant qu'il existe φ non affine opérant sur Re A/K. D'après les Théorèmes 2 (Section 2.2) et 9, on sait qu'il existe une partie afinie Φ de K telle que tout $x_0 \in K \mid \varnothing$ admette un voisinage compact K_{x_0} avec $A/K_{x^{\cdot}} = C(K_{x_0})$. On en déduit facilement que $A/K = C(K)$ de la façon suivante: A étant modulaire sur X, chaque K_{x_0} est un ensemble pic pour A, donc toute mesure sur K orthogonale à A a une trace nulle sur K_{x_0}, donc a une trace sur K portée par $\varnothing$. $\varnothing$ étant fini, toute mesure sur X orthogonale à A est donc nulle sur K. On sait qu'alors K est pic pour A, donc que A/K est uniforme. On a donc $A/K = C(K)$.

Remarque. J. Detraz m'a signalé qu'il existe une algèbre uniforme de Dirichlet A, sur un compact X, telle que Re A ne sort pas normal sur X: prendre pour A la sous-algèbre de l'algèbre du disque formée des fonctions constantes sur la suite $e^{i(\pi/n)}$; $n = 1, 2, \ldots$, et pour X le compact obtenu à partir du disque unité en identifiant ces points.

3.4. Re A *est-il réticulé?*

Nous pouvons maintenant étudier si $\varphi(t) = |\, t\,|$ opère sur Re A, grâce au lemme suivant:

LEMME. *Soit E un espace de Banach de fonctions réelles sur X. Si E est réticulé (i.e., si $\varphi(t) = |\, t\,|$ opère sur E) alors E est normal.*

Démonstration. Soient K et K' deux sous-compacts disjoints de X. Soit $u \in E$. Le problème est de prolonger u/K en un élément $\tilde{u}$ de E nul sur K'. E étant dense dans $C_R(X)$ (d'après le théorème de Weierstrass–Stone) il existe $v \in E$ telle que $v < u$ sur K et $v > 2\| u \|_K$ sur K'. Pour tout réel λ la fonction:

$$u_\lambda = \inf\{\sup\{u, v\}, \lambda\}$$

appartient à E et si on prend $\lambda = \| u \|_K$ la fonction:

$$\tilde{u} = 2u_{\lambda_1} - u_{2\lambda_1}$$

répond à la question.

Le Théorème 8 nous montre alors que:

THÉORÈME 10 [3]. *Si A est une algèbre uniforme sur X telle que $A \neq C(X)$, Re A n'est pas réticulé.*

De la même façon on obtient à partir du Théorème 9:

THÉORÈME 11. *Si A est une algèbre uniforme modulaire sur X, si K est un sous-compact de X tel que $A/K \neq C(K)$, Re A/K n'est pas réticulé.*

Remarque. Dufresnoy a montré que si S_1 et S_2 sont deux suites d'interpolation pour l'algèbre du disque A, Re $A/S_1 \cup S_2$ est toujours réticulé (et bien sûr $S_1 \cup S_2$ n'est pas toujours d'interpolation) [17].

3.5. *Calcul symbolique et conjugaison de Fourier*

Pour toute fonction continue f sur le cercle $T = R/2\pi z$ notons $\tilde{f}$ sa conjuguée définie formellement par:

$$\tilde{f} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(n) \hat{f}(n)\, e^{in\theta}.$$

Notons ensuite:

$$\tilde{C}(T) = \{f \in C(T); \tilde{f} \in C(T)\}.$$

Puis, pour chaque sous-compact K de T:

$$\tilde{C}(K) = \{f/K; f \in \tilde{C}(T)\}.$$

Nous allons montrer:

THÉORÈME 12. *Soit K un sous-compact de T. On a la dichotomie*:

· *Soit $\tilde{C}(K) = C(K)$.*

· *Soit seules les fonctions affines $(aZ + b\bar{Z} + c; a \in \mathbf{C},\ b \in \mathbf{C},\ c \in \mathbf{C})$ opèrent sur $\tilde{C}(K)$.*

Notons $\tilde{C}_{\mathbf{R}}(T) = \{f \in \tilde{C}(T);\ f \text{ réelle}\}$. Remarquons que $\tilde{C}(T) = \tilde{C}_{\mathbf{R}}(T) + i\tilde{C}_{\mathbf{R}}(T)$. Il suffit donc de montrer la dichotomie analogue sur $\tilde{C}_{\mathbf{R}}(T)$. Notant $A = \{f \in C(T); \hat{f}(n) = 0, \forall n < 0\}$, A est une algèbre uniforme sur $\mathbf{T}$ (algèbre du disque) et on vérifie aisément que $\operatorname{Re} A = \tilde{C}_{\mathbf{R}}(T)$. Le théorème est donc une conséquence immédiate du Théorème 9 (Section 3.3) et de la proposition suivante:

PROPOSITION 12. *$\tilde{C}_{\mathbf{R}}(T)$ est normal sur T.*

Démontrons donc cette proposition (ou, ce qui revient au même, que $\tilde{C}(T)$ est normal sur T). Notons M l'algèbre des multiplicateurs de $\tilde{C}(T)$:

$$M = \{h \in C(T);\ \forall f \in \tilde{C}(T),\ h \cdot f \in \tilde{C}(T)\}.$$

Il nous suffit bien sûr de montrer que, étant donnés deux compacts disjoints K et K' de T, il existe $h \in M$ telle que $h/K = 1$ et $h/K' = 0$. Et ceci découle immédiatement du lemme suivant, que nous démontrons directement mais qui peut aussi se déduire de résultats d'analyse harmonique classique (cf. [18]).

LEMME. *Toute fonction deux fois continuement différentiable est un multiplicateur de $\tilde{C}(T)$.*

Démonstration. Pour tout $f \in \tilde{C}(T)$, pour tout entier p, notons

$$H_p(f) = \sum_{-p}^{\infty} \hat{f}(n)\, e^{in\theta}$$

$\tilde{C}(T)$ est une espace de Banach pour la norme:

$$N(f) = \|f\|_\infty + \| H_0(f)\|_\infty .$$

Pour montrer que $C^2_{(\mathbf{T})}$, classe des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbf{T}$, multiplie $\tilde{C}(\mathbf{T})$, il suffit de montrer que pour tout polynome trigonométrique h on a:

$$N(hf) < \| h \|_{C^2_{(\mathbf{T})}} \times N(f), \qquad \forall f \in \tilde{C}(T).$$

Soit donc $h = \sum_{-n}^{+n} C_p\, e^{ip\theta}$. On a:

$$H_0(hf) = \sum_{-n}^{+n} C_p e^{ip\theta} H_p(f).$$

Mais $\| H_p(f)\|_\infty < (|p| + 1)N(f)$. On a donc:

$$\| H_0(hf)\|_\infty < \left(\sum_{-n}^{+n} |p| |C_p|\right) N(f)$$

d'où le résultat.

3.6. *Appendice*: Théorèmes de de Leeuw et Katznelson.

Nous nous proposons de résumer ici les démonstrations de deux résultats suivants, dus à de Leeuw et Katznelson [4], et que nous utilisons dans le texte. Pour plus de détails voir le papier original de de Leeuw et Katznelson [4].

THÉORÈME A [4]. *Soit E un sous-espace vectoriel de $C_{\mathbf{R}}(X)$, fermé pour la convergence uniforme sur X, séparant les points et contenant les constantes. Si une fonction φ non affine opère sur E, $E = C_R(X)$.*

Démonstration. Soit φ opérant sur E. Pour une fonction k bien choisie la convolée $\varphi' = \varphi * k$ qui opère trivialement encore sur E (puisque E est uniforme), est de classe C^∞ et assez proche de φ pour que, si φ est non affine, $\varphi' = \varphi * k$ soit non affine. En remplaçant φ' par $\lambda\varphi'(t - t_0) - at + b$, qui opère encore sur E, on peut donc se ramener à la situation suivante: il existe φ_1 opérant sur E, admettant un développement limité à l'origine de la forme:

$$\varphi_1 = t^2 + t^2\epsilon(t) \qquad \text{où} \quad \epsilon(t) \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to 0.$$

Pour tout entier n la fonction φ_n définie par:

$$\varphi_n(t) = n^2\varphi_1\left(\frac{t}{n}\right) = t^2 + t^2\epsilon\left(\frac{t}{n}\right)$$

opère sur E et, faisant tendre n vers l'infini on voit donc que t^2 opère sur E. Donc E est une algèbre et par suite, d'après le théorème de Weierstrass–Stone, on a $E = C_{\mathbf{R}}(X)$.

THÉORÈME B [4]. *Soit A une sous-algèbre de $C(X)$, fermée pour la convergence uniforme sur X, séparant les points et contenant les constantes. Si une fonction non analytique opère sur E, alors $E = C(X)$.*

Démonstration. Comme précédemment on se ramène au cas où φ est de classe C^∞ et où elle admet comme développement limité à l'origine:

$$\varphi(Z) = \bar{Z} + |Z|\,\epsilon(Z)$$

et en considérant: $\varphi_n(Z) = n\varphi(Z/n)$ on montre que $\bar{Z}$ opère sur A, donc que A est autoadjointe, d'où $A = C(X)$.

BIBLIOGRAPHIE

1. K. HOFFMAN ET J. WERMER, *Pacific J. Math.* **12** (1962), 941.
2. A. BERNARD, *C. R. Acad. Sc. Paris Sér. A* **267** (1968), 634.
3. A. BERNARD, *C. R. Acad. Sc. Paris Sér. A* **271** (1970), 1120.
4. K. DE LEEUW ET Y. KATZNELSON, *J. Anal. Math.* **11** (1963), 207.
5. A. BROWDER, *in* "Function Algebras," p. 88, Scott, Foresman and Co., Glenville, IL, 1966.
6. S. J. SIDNEY ET E. L. STOUT, *Proc. Amer. Math. Soc.* **19** (1968), 380.
7. I. GLICKSBERG, *Math. Scand.* **23** (1968), 188.
8. N. TH. VAROPOULOS, Seminars on sets of interpolation. Institut Mittag Leffler, Djursholm, 1970.
9. A. BERNARD, Journées sur les algèbres de fonctions, Grenoble, Sept. 1970.
10. I. WIK, *Arch. Math.* **4** (1960).
11. J. WERMER, *Pacific J. Math.* **13** (1963), 1423.
12. A. BERNARD, *C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A* **270** (1970), 29.
13. T. HEDBERG, *C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A* **270** (1970), 441.

14. T. HEDBERG, *C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A* **270** (1970), 1491.
15. J. P. KAHANE, *Studia Math.* **31** (1968), 287.
16. A. BERNARD, *C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A* **270** (1970), 818.
17. A. DUFRESNOY, *C. R. Acad. Sc. Paris*, à paraître.
18. A. ZYGMUND, Trigonometric series, Cambridge University Press, 1959